سری پنجم تمرین‌های ریاضی ۲

۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۷

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): حد تابع $f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2}$ را در مبدا بیابید.

سوال ۲ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): فرض کنید z تابعی از u و v با مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشد و در نقطه $a=(1,\pi/2)$ داشته باشیم:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(a)=2,\frac{\partial z}{\partial v}(a)=0,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(a)=2,\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(a)=0,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(a)=-1$$

اگر $u=x+\sin(y)$، $v=y+\sin(x)$ و $b=(0,\pi/2)$، مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}(b)$، $\frac{\partial z}{\partial y}(b)$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(b)$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(b)$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(b)$ را محاسبه کنید.

سوال ۳ (نیم‌سال دوم ۹۶-۹۵): فرض کنید متغیرهای x، y، z، u و v در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases} e^{u+v}+yz=\cos y-2\sin x \\ e^{x-y}+uv=sinz \end{cases}$$

الف) نشان دهید در نزدیکی نقطه $(x,y,z,u,v)=(0,0,0,1,-1)$ می‌توان x و v را بر حسب توابعی مشتق‌پذیر از y، z و u نوشت.

ب) مشتقات جزیی (پاره‌ای) مرتبه اول x و v را نسبت به y، z و u در نقطه $(y,z,u)=(0,0,1)$ محاسبه کنید.

سوال ۴ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که برای هر $x\in\mathbb{R}^n$، $\nabla f(x).x=f(x)$. نشان دهید برای هر $t\in\mathbb{R}$، و هر $x\in\mathbb{R}^n$، $f(tx)=tf(x)$.

(راهنمایی: برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ داده شده، به تابع $\phi:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $\phi(t)=f(tx)/t$ توجه کنید.)

سوال ۵ (نیم‌سال دوم ۹۶-۹۵): فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی (پاره‌ای) مرتبه اول پیوسته باشد و $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ را خمی در نظر بگیرید که به ازای هر $t\in\mathbb{R}$،

$$r'(t)=(\frac{\partial f}{\partial y}(r(t)),-\frac{\partial f}{\partial x}(r(t))).$$

نشان دهید تصویر r، قسمتی از یک منحنی تراز (مجموعه تراز) تابع f است.

سوال ۶ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه

$$f(x,y,z)=(x+y+z+xyz,x+y+z+\cos(xyz),x+y+z+e^{xyz})$$

داده شده است. مشتق f را در نقطه $a=(0,1,2)$ پیدا کنید.

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به صورت $f(x,y)=y(x^2-1)$ داده شده است. سطوح تراز این تابع را به صورت تقریبی رسم کرده و جهت بردار گرادیان را در نقاط مختلف شکل مشخص کنید.

تمرین ۲: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sin^2 y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ثابت کنید f در $(0,0)$ پیوسته است.

تمرین ۳: فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) آیا $f_x(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته است؟

ب) $f_{xx}(0,0)$ را بیابید.

تمرین ۴: منحنی پارامتری $R(t)=(x(t),y(t))$ به صورت ضمنی $\begin{cases}f(x,y,t)=0\\ g(x,y,t)=0\end{cases}$ داده شده است. نشان دهید ضریب زاویه خط مماس غیر قائم بر این منحنی برابر است با:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{f_xg_t-g_xf_t}{g_yf_t-f_yg_t}$$

تمرین ۵: مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^2+2y^2=3z^2$ در نقطه $A=(1,1,3)$ در امتداد منحنی C با معادله $\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ x+z-4=0\end{cases}$ را تعیین کنید.

تمرین ۶: اگر نمودار تابع $f(x,y)$ که در (a,b) مشتق‌پذیر است، شامل بخشی از یک مستقیم مار بر (a,b) باشد نشان دهید که خط صفحه مماس بر $z=f(x,y)$ در نقطه (a,b) قرار دارد.

تمرین ۷: اگر $g(t)$ تابعی مشتق‌پذیر از t باشد، سطح $z=yg(\frac{x}{y})$ را توصیف کنید و نشان دهید همه صفحات مماس بر آن از مبدا می‌گذرد.

تمرین ۸: ذره‌ای در فضای سه بعدی چنان حرکت می‌کند که جهت حرکتش در هر نقطه برا سطح تراز تابع $f(x,y,z)=4-x^2-2y^2+3z^2$ که مار بر آن نتقطه عمود است. اگر مسیر ذره از نقطه‌ی $(1,1,8)$ بگذرد نشان دهید از $(2,4,1)$ نیز می‌گذرد. آیا از $(3,7,0)$ نیز می‌گذرد؟

تمرین ۹: عملگر $\Delta=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}$ را در مختصات کروی بدست آورید.

تمرین ۱۰: فرض کنید f و g به ترتیب توابعی باشد مشتق‌پذیر و در معادلات $f(x+y)=f(x)+f(y)$ و $g(x+y)=g(x)g(y)$ صدق کند، ثابت کنید f خطی و g نمایی است ($x,y\in\mathbb{R}$).

تمرین ۱۱: قاعده مشتق‌گیری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b F(x,t)dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)dx$$

تمرین ۱۲: در مورد نحوه محاسبه مشتق زیر توضیح دهید:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} F(x,t)dx$$

تمرین ۱۳: حاصل عبارت زیر را به کمک مشتق حساب کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

تمرین ۱۴: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه α باشد؛ یعنی برای هر x و y و $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$$

ثابت کنید:

الف) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x,y)$

ب) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)f(x,y)$